SOLUCIONES SEGUNDA HOJA EJERCICIOS 1º BACHILLER CIENCIAS

<u>Ejercicio nº 1.-</u>

a) Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

$$\boldsymbol{log_2 256 - log_3 \sqrt[3]{3} + log_2 \sqrt{2}}$$

b) Halla el valor de *x*, aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\boldsymbol{log x = 3 log 2 - 2 log 3}$$

Solución:

$$a)\ log_2 2^8 - log_3 3^{1/3} + log_2 2^{1/2} = 8 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{49}{6}$$

$$b)\ logx = log 2^3 - log 3^2 = log\frac{2^3}{3^2} = log\frac{8}{9} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{9}$$

<u>Ejercicio nº 2.-</u>

Encuentra el término general de cada una de estas sucesiones:

a) 0, 3, 8, 15, 24, … **b) 3; 1,8; 0,6; -0,6; -1,8; …**

Solución:

a) $a_n = n^2 - 1$

b) Es una progresión aritmética con $a_1 = 3$ y $d = -1{,}2.$ Por tanto:

$$a_n = 3 + (n-1)\cdot(-1{,}2) = 3 - 1{,}2n + 1{,}2 = 4{,}2 - 1{,}2n$$

$$a_n = 4{,}2 - 1{,}2n$$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Resuelve:

a) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{y = 5 - \sqrt{x}} \\ \boldsymbol{x = y^2 - 2y + 1} \end{array}\right\}$

b) $\boldsymbol{\dfrac{2(x-3)}{3} - \dfrac{x+1}{3} > x - 2}$

Solución:

a) $x = \left(5 - \sqrt{x}\right)^2 - 2\left(5 - \sqrt{x}\right) + 1$

$x = 25 + x - 10\sqrt{x} - 10 + 2\sqrt{x} + 1$

$8\sqrt{x} = 16 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 4, \quad y = 3$

b) $2(x-3) - (x+1) > 3(x-2)$

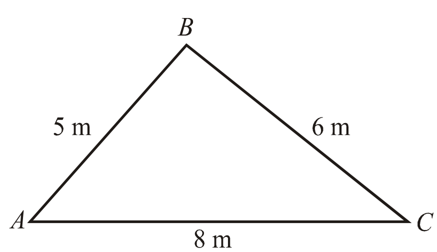
$2x - 6 - x - 1 > 3x - 6$

$-1 > 2x$

$x < \dfrac{-1}{2} \quad \to \quad \text{Intervalo } \left(-\infty, \dfrac{-1}{2}\right)$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Calcula $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ en el siguiente triángulo:



Solución:

- Aplicamos el teorema del coseno para hallar uno de los ángulos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

$36 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\hat{A}$

$36 = 89 - 80\cos\hat{A}$

$80\cos\hat{A} = 53$

$\cos\hat{A} = \dfrac{53}{80} = 0{,}6625 \quad \to \quad \hat{A} = 48^\circ\, 30'\, 33''$

- Hallamos el ángulo $\hat{B}$ aplicando de nuevo el teorema del coseno :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$
$$64 = 36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos\hat{B}$$
$$\cos\hat{B} = -0{,}05 \quad \rightarrow \quad \hat{B} = 92^\circ\ 51'\ 58''$$

• El ángulo $\hat{C}$ lo obtenemos así :

$$\hat{C} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 38^\circ$$

• Así:

$$\hat{A} = 48^\circ\ 30'\ 33''$$
$$\hat{B} = 92^\circ\ 51'\ 58''$$
$$\hat{C} = 38^\circ\ 37'\ 29''$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

a) Demuestra que:

$$\boldsymbol{2tgx \cdot \left(\frac{1 + \cos x}{2}\right) = \operatorname{sen}x + tgx}$$

b) Resuelve la ecuación:

$$\boldsymbol{\left(\operatorname{sen}^2 x\right) - 1 = 2\cos^2 x}$$

Solución:

$$a)\ \ 2tgx\left(\frac{1+\cos x}{2}\right) = \frac{2tgx\left(1+\cos x\right)}{2} = tgx\left(1+\cos x\right) = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\left(1+\cos x\right) =$$
$$= \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen}x\cos x}{\cos x} = tgx + \operatorname{sen}x = \operatorname{sen}x + tgx$$

$$b)\ \ \left(\operatorname{sen}^2 x\right) - 1 = 2\cos^2 x$$
$$\left(1 - \cos^2 x\right) - 1 = 2\cos^2 x$$
$$-\cos^2 x = 2\cos^2 x$$
$$3\cos^2 x = 0 \quad \rightarrow \quad \cos^2 x = 0$$
$$\cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 90^\circ + 360^\circ k & \rightarrow \quad x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x_2 = 270^\circ + 360^\circ k & \rightarrow \quad x_2 = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbf{Z}$$

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

a) Escribe en forma binómica $z = 2_{30^\circ}$

b) Halla su opuesto y su conjugado en forma binómica y polar.

c) Representa z, $-z$ y $\bar{z}$.

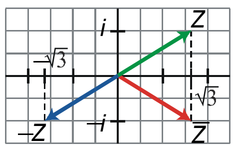
Solución:

a) $z = 2_{30^\circ} = 2\left(\cos 30^\circ + i sen 30^\circ\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

b) *Opuesto*: $-z = -\sqrt{3} - i = 2_{210^\circ}$

Conjugado: $\bar{z} = \sqrt{3} - i = 2_{330^\circ}$

c)



Ejercicio nº 7.-

Halla:

a) $\dfrac{(2+2i)}{-1+3i} - i^{28}$

b) $\sqrt[3]{27i}$

Solución:

a) $\dfrac{(2+2i)}{-1+3i} - i^{28} = \dfrac{(2+2i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} - 1 = \dfrac{-2-6i-2i-6i^2}{(-1)^2-(3i)^2} - 1 =$

$= \dfrac{-2-8i+6}{1+9} - 1 = \dfrac{4-8i}{10} - 1 = \dfrac{2(2-4i)}{10} - 1 = \dfrac{2-4i}{5} - 1 =$

$= \dfrac{2-4i-5}{5} = \dfrac{-3-4i}{5} = \dfrac{-3}{5} - \dfrac{4}{5}i$

b) $\sqrt[3]{27i} = \sqrt[3]{27_{90^\circ}} = 3_{\frac{90^\circ+360^\circ n}{3}} = 3_{30^\circ+120^\circ n}$ para $n = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$3_{30^\circ} = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

$$3_{150^\circ} = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$3_{270^\circ} = 3(0 - i) = -3i$$

Ejercicio nº 8.-

Halla el valor de k para que los puntos $A(3, -2)$, $B(1, 5)$ y $C(10, k)$ estén alineados.

Solución:

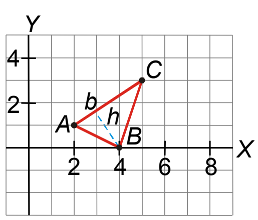
Para que estén alineados, las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y de $\overrightarrow{AC}$ han de ser proporcionales:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (-2, 7) \\ \overrightarrow{AC} = (7, k+2)\end{array}\right\} \quad \frac{k+2}{7} = \frac{7}{-2} \quad \rightarrow \quad -2(k+2) = 49 \quad \rightarrow \quad k+2 = \frac{-49}{2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{-53}{2}$$

Ejercicio nº 9.-

Halla el área del triángulo de vértices $A(2, 1)$, $B(4, 0)$ y $C(5, 3)$.

Solución:



- Vamos a tomar como base del triángulo el lado AC y, como altura, la correspondiente al vértice B.
- La longitud de la base, b, será la distancia entre A y C:

$$b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(5-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

- La altura, h, es la distancia del vértice B a la recta que pasa por A y C:

$$m = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad y = 1 + \frac{2}{3}(x-2) \quad \rightarrow \quad 3y = 3 + 2x - 4 \quad \rightarrow \quad r: 2x - 3y - 1 = 0$$

- Distancia de B a r:

$$h = dist(B, r) = \frac{|2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

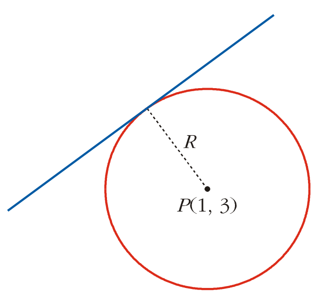
Por tanto, el área es:

$$Área = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{13} \cdot \frac{7}{\sqrt{13}}}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5\ \text{u}^2$$

Ejercicio nº 10.-

Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto *P* (1, 3), y que es tangente a la recta *r*: 4*x* + 3*y* – 1 = 0.

Solución:



• El radio, R, de la circunferencia es igual a la distancia del centro, $P(1, 3)$, a la recta tangente, $r: 4x + 3y - 1 = 0$:

$$R = dist(P, r) = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|4 + 9 - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}$$

• La ecuación de la circunferencia será:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2; \text{ es decir:}$$

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = \frac{144}{25} \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y - \frac{106}{25} = 0$$

$$25x^2 + 25y^2 - 50x - 150y - 106 = 0$$

Ejercicio nº 11.-

Calcula los límites siguientes y representa gráficamente los resultados que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

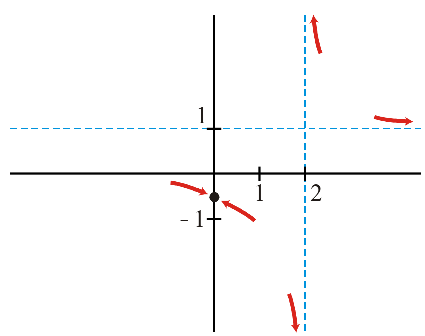
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+1)}{(x-2)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = +\infty$

Representación:



<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Calcula $f'(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = 8x^5 - 2x^3 + \dfrac{1}{3}$

b) $f(x) = (x^4 - 3x)e^x$

c) $f(x) = sen\left(\dfrac{x}{x^2 - 1}\right)$

Solución:

a) $f'(x) = 40x^4 - 6x^2$

b) $f'(x) = \left(4x^3 - 3\right)e^x + \left(x^4 - 3x\right)e^x = \left(4x^3 - 3 + x^4 - 3x\right)e^x = \left(x^4 + 4x^3 - 3x - 3\right)e^x$

c) $f'(x) = cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) \cdot \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} =$

$= cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) \cdot \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-x^2 - 1}{\left(x^2 - 1\right)^2} \cdot cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

Dada la función :

$$\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - x}$$

a) Escribe la ecuación de la recta tangente a la función en *x* = 1.
b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

Solución:

a) • $f'(x) = 6x - 1$

- La pendiente de la recta es $f'(1) = 5$.
- Cuando $x = 1,\ y = 2$.
- La recta será:

$$y = 2 + 5(x - 1) = 2 + 5x - 5 = 5x - 3$$

b) Estudiamos el signo de la derivada:

$$6x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad 6x > 1 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{6}$$

$$6x - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad 6x < 1 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{6}$$

- Es decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$ y creciente en $\left(\frac{1}{6}, +\infty\right)$, y tiene un mínimo en $x = \frac{1}{6}$.

<u>Ejercicio nº 14.-</u>

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad x\le 2\\ 2x+1 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

a) Estudia su continuidad.
b) Represéntala gráficamente.

Solución:

a) • Si $x \neq 2$, es una función continua.

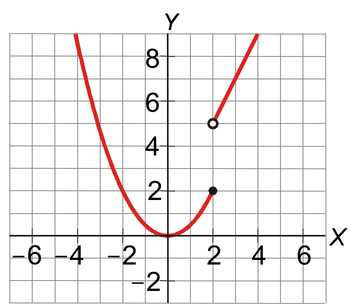
• Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = 2\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(2x+1) = 5\end{array}\right\}\text{ No existe } \lim_{x\to 2} f(x);\text{ luego es discontinua en } x = 2.$$

b) • Si $x \le 2$, es un trozo de parábola.

• Si $x > 2$, es un trozo de recta.

• La gráfica es:



Ejercicio nº 15.-

a) Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$$

b) Ayúdate de la gráfica para estudiar los siguientes aspectos de $f(x)$: dominio, continuidad e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución:

a) • $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x\right) = +\infty$

• Puntos de corte con los ejes:

Con el eje X → $\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x=0$ → $x^3-3x^2-9x=0$

$$\rightarrow \quad x\left(x^2 - 3x - 9\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 36}}{2} \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} x = 4{,}86 \\ x = -1{,}85 \end{cases}$$

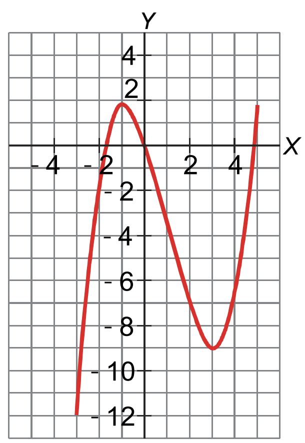
Puntos $(0, 0)$; $(4{,}86;\ 0)$ y $(-1{,}85;\ 0)$.

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}\left(-1, \dfrac{5}{3}\right) \\ x = 3 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}\,(3, -9) \end{cases}$$

- Gráfica:



b) • Dominio $= \mathbf{R}$

- Es una función continua.
- Creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 3)$.

<u>Ejercicio nº 16.-</u>

a) Representa la gráfica de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{x^2 - 4x}}$$

b) Ayúdate de la gráfica para estudiar la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $\boldsymbol{f(x)}$.

Solución:

a) • Dominio $= \mathbf{R} - \{0, 4\}$

• Puntos de corte con los ejes:

No corta al eje X, pues $f(x) \neq 0$.

No corta al eje Y, pues $x = 0$ no está en el dominio.

• Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = 4$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$$

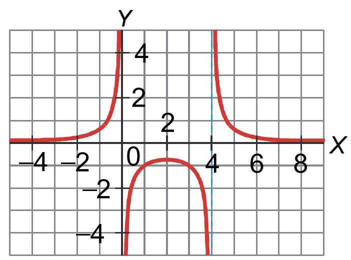
• Asíntota horizontal : $y = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

• Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{-3(2x-4)}{(x^2-4x)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \to \quad \text{Punto}\left(2, \frac{-3}{4}\right)$$

• Gráfica:



b)

• Continuidad:

Si $x \neq 0$ y $x \neq 4$, es continua.

En $x = 0$ y en $x = 4$ es discontinua, pues tiene dos ramas infinitas (asíntotas verticales).

• Es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$ y decreciente en $(2, 4) \cup (4, +\infty)$